

วิธีเรียงสับเปลี่ยน

วิธีเรียงสับเปลี่ยน เป็นวิธีการนำสิ่งต่างๆ มาจัดเรียงเป็นอันดับต่อเนื่องกัน ถ้าอันไม่เหมือนกัน ถือว่าเป็นวิธีที่แตกต่างกัน ดังนั้น การสลับที่กันระหว่างสิ่งของที่นำมาจัดเรียงกันจึงมีความหมาย นับเป็นคนละวิธี และสิ่งที่เราจะศึกษาคือ หากจำนวนวิธีที่จะเกิดขึ้นได้ว่ามีกี่วิธี ซึ่งจะแยกศึกษาในแต่ละหัวข้อดังนี้

1. วิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งที่แตกต่างกันทั้งหมดแบบเส้นตรง
2. วิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งที่ไม่แตกต่างกันทั้งหมดแบบเส้นตรง
3. วิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของแบบวงกลม

1. วิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งที่แตกต่างกันทั้งหมดแบบเส้นตรง

หลักการที่ 1 ถ้ามีของ n สิ่งที่แตกต่างกันทั้งหมด นำมาจัดเรียงเป็นเส้นตรงทั้งหมด n สิ่ง จำนวนวิธีที่จะทำได้เท่ากับ $n!$ วิธี

ตัวอย่างที่ 1 ถ้ามีอักษร 3 ตัว คือ A, B, C นำอักษรทั้ง 3 ตัวมาจัดเป็นแถวจะจัดได้กี่วิธี

วิธีทำ จากโจทย์จะเห็นว่าเข้ากับหลักการที่ 1 คือ เป็นการนำอักษร 3 ตัวมาจัดเรียงทั้งหมด ดังนั้นจะมีวิธีทั้งหมด $= 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ วิธี

ตัวอย่างที่ 2 จะมีกี่วิธีที่นำตัวอักษรจากคำว่า HONESTY มาจัดเป็นคำใหม่ โดยไม่คำนึงถึงความหมาย ถ้า

- (1) S และ T จะต้องอยู่ติดกัน (2) S และ T ไม่อยู่ติดกัน

วิธีทำ จากโจทย์จะเห็นว่าตัวอักษรที่ต่างกันทั้งหมด 7 ตัว

- (1) S และ T จะต้องอยู่ติดกัน

เนื่องจาก S และ T จะต้องอยู่ติดกัน ดังนั้นจะต้องมีขั้นตอนในการจัดเรียง 2 ขั้นตอน คือ
ขั้นตอนที่ 1 มัด S และ T เข้าด้วยกันนับเป็นตัวอักษร 1 ตัว S และ T สลับที่กันได้ 2! วิธี
ขั้นตอนที่ 2 เมื่อมัด S และ T เป็นตัวอักษรเดียวกันแล้วเท่ากับว่าเหลือตัวอักษรทั้งหมด 6 ตัว
นำมาจัดเรียงได้ทั้งหมด 6! วิธี

∴ จากทั้ง 2 ขั้นตอน โดยหลักการนับ จะได้ว่า วิธีที่จะจัดเรียงตัวอักษร

$$\text{โดยให้ S และ T อยู่ติดกัน} = 2! \times 6! = 2 \times 720 = 1440 \text{ วิธี}$$

- (2) S และ T ไม่อยู่ติดกัน

ถ้าจะคิดแบบตรงๆ นั้นสามารถที่จะทำได้ยาก หลายขั้นตอน จึงจะใช้วิธีหาทั้งหมดแล้วลบ กรณีที่ S และ T อยู่ติดกัน ดังนี้

$$\text{วิธีที่ S และ T ไม่อยู่ติดกัน} = \text{วิธีจัดเรียงทั้งหมด} - \text{วิธีที่ S และ T อยู่ติดกัน}$$

$$\text{วิธีทั้งหมดในการจัดเรียงตัวอักษรทั้ง 7 ตัว} = 7! \text{ วิธี}$$

$$\text{วิธีที่ S และ T อยู่ติดกัน} = 1440 \text{ วิธี}$$

$$\text{ดังนั้น วิธีที่ S และ T ไม่อยู่ติดกัน} = 7! - 1440 \text{ วิธี}$$

$$= 5040 - 1440 = 3600 \text{ วิธี}$$

ตัวอย่างที่ 3 ถ้ามีเด็กชาย 3 คน เด็กหญิง 2 คน ในเด็กหญิง 2 คนนี้ มีเด็กหญิงอ้อรวมอยู่ด้วย นำเด็กทั้ง 5 คนนี้มาเรียงเป็นแถวได้กี่วิธี โดยมีเงื่อนไขว่า เด็กหญิงอ้อต้องยืนหัวแถวหรือท้ายแถว

วิธีทำ จากโจทย์จะได้ว่าเป็นการจัดเรียงเด็ก 5 คน แต่เด็กหญิง อ้อ ต้องยืนหัวแถวหรือท้ายแถวเท่านั้น เพื่อง่ายต่อการทำความเข้าใจ เขียนรูปได้ดังนี้



สามารถแยกเป็น 2 ขั้นตอน คือ

ขั้นตอนที่ 1 ให้อ้อเลือกยืนหัวแถวหรือท้ายแถว ได้ 2 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 จัดเรียงเด็กที่เหลืออีก 4 คน ได้ 4! วิธี

จากทั้ง 2 ขั้นตอน โดยหลักการนับ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \therefore \text{วิธีที่จะจัดเด็ก 5 คนโดยให้อ้อยืนหัวแถวหรือท้ายแถว} &= 2 \times 4! \text{ วิธี} \\ &= 2 \times 24 = 48 \text{ วิธี} \end{aligned}$$

หลักการที่ 2 ถ้ามีของ n สิ่งที่แตกต่างกันทั้งหมด เลือกมาจัดเรียงเป็นเส้นตรง r สิ่ง

จำนวนวิธีที่จะทำได้เท่ากับ $P_{n,r}$ วิธี โดยที่ $P_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}$

ข้อกำหนด $P_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}$

P เป็นอักษรตัวหน้าของคำว่า Permutation บ่งบอกว่าเป็นวิธีเรียงสับเปลี่ยน

n คือ จำนวนสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด

r คือ จำนวนสิ่งของที่เลือกมาจัดเป็นเส้นตรง

เช่น $P_{8,2} = \frac{8!}{(8-2)!} = \frac{8!}{6!} = 8 \times 7 = 56$

$$P_{6,4} = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!} = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$$

ตัวอย่างที่ 1 มีของ 7 สิ่งต่างๆ กัน จามาจัดเรียงเป็นแถว 3 สิ่ง จงหาวิธีที่จะเกิดขึ้นได้ทั้งหมด

วิธีทำ จากหลักการที่ 2 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \text{วิธีการในการจัดเรียงทั้งหมด} &= P_{7,3} = \frac{7!}{(7-3)!} \text{ วิธี} \\ &= \frac{7!}{4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times \cancel{4!}}{\cancel{4!}} \text{ วิธี} \\ &= 210 \text{ วิธี} \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 2 ถ้านำตัวอักษร 3 ตัวจากคำว่า STAND มาจัดเรียงเป็นคำใหม่โดยไม่คำนึงถึงความหมาย จะจัดได้คำต่างๆ กันทั้งหมดกี่วิธี

วิธีทำ มีตัวอักษรทั้งหมด 5 ตัว นำมาจัดเรียงครั้งละ 3 ตัว

$$\begin{aligned} \text{จะมีวิธีในการจัดคำต่างๆ กันทั้งหมด} &= P_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)!} \text{ วิธี} \\ &= \frac{5!}{2!} = 5 \times 4 \times 3 \text{ วิธี} \\ &= 60 \text{ วิธี} \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาค่า n ซึ่งทำให้ $2P_{n,2} + 50 = P_{2n,2}$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad P_{n,2} &= \frac{n!}{(n-2)!} = n(n-1) = n^2 - n \\ P_{2n,2} &= \frac{2n!}{(2n-2)!} = 2n(2n-1) = 4n^2 - 2n \\ \text{จาก} \quad 2P_{n,2} + 50 &= P_{2n,2} \\ \text{จะได้} \quad 2(n^2 - n) + 50 &= 4n^2 - 2n \\ 2n^2 - 2n + 50 &= 4n^2 - 2n \\ 50 &= 2n^2 \\ n^2 &= 50 \\ n &= \pm 5 \end{aligned}$$

แต่เนื่องจาก n เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ $n = 5$

แบบฝึกหัด

1. จงหาค่าของ

$$(1) P_{8,3} = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times \cancel{5!}}{\cancel{5!}} = 8 \times 7 \times 6 = 336$$

$$(2) P_{5,4} = \frac{5!}{(5-4)!} = \frac{5!}{1!} = 120$$

$$(3) P_{12,5} = \frac{12!}{(12-5)!} = \frac{12!}{7!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7!} = 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 = 95,040$$

2. ถ้า $P_{n,4} = 18 \times P_{n-1,2}$ จงหาค่า n

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad \frac{n!}{(n-4)!} &= 18 \times \frac{(n-1)!}{(n-1-2)!} \\ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3) \cancel{(n-4)!}}{\cancel{(n-4)!}} &= 18 \times \frac{(n-1)(n-2) \cancel{(n-3)!}}{\cancel{(n-3)!}} \\ n(n-1)(n-2)(n-3) &= 18 \times (n-1)(n-2) \end{aligned}$$

$$\text{เอา } (n-1)(n-2) \text{ หารตลอด} \quad n(n-3) = 18 \quad (\text{จาก } 6 \times 3 = 18)$$

$$\therefore n = 6$$

3. ถ้ามีธง 7 สี และ 1 สี นำธงทั้งหมดมามัดผูกเป็นแถวยาวเพื่อทำเป็นสัญญาณธง จะสามารถทำเป็นสัญญาณธงได้กี่วิธี

วิธี จากโจทย์จะได้ว่า มีสิ่งของที่ต่างกันทั้งหมด (n) 7 สิ่ง

∴ เอามาจัดเรียงทั้งหมดเพื่อสร้างสัญญาณธงได้ $7! = 5040$ วิธี

4. จะสร้างจำนวนที่มี 4 หลักจากเลขโดด 2, 4, 6, 8, 9 ได้ทั้งหมดกี่จำนวน โดยแต่ละจำนวนจะต้องไม่มีเลขในหลักใดซ้ำกันเลย

วิธีทำ จากโจทย์มีตัวเลขทั้งหมด (n) 5 ตัว

นำมาสร้างจำนวนที่มี 4 หลัก (r)

∴ จะมีวิธีในการสร้างจำนวนที่มี 4 หลักแต่ละหลักไม่ซ้ำกันได้ $P_{5,4} = \frac{5!}{(5-4)!}$
 $= \frac{5!}{1!} = 120$ วิธี

5. จะมีกี่วิธีที่จะจัดชาย 3 คน หญิง 4 คน นั่งเก้าอี้ซึ่งเรียงเป็นแถวตรง 7 ตัว โดยที่ ชายและหญิงต้องนั่งสลับกัน

วิธีทำ จากโจทย์ถ้าเอาชายและหญิงมาเรียงสลับกันจะได้ลักษณะ ดังนี้

♂ ♀ ♂ ♀ ♂ ♀ ♂

สามารถแบ่งออกได้เป็น 2 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 จัดให้ผู้ชาย 3 คน นั่งตามที่นั่ง 3 ที่ จะนั่งสลับที่กันได้ $3!$ วิธี

ขั้นตอนที่ 2 จัดให้ผู้หญิง 4 คน นั่งตามที่นั่ง 4 ที่ จะนั่งสลับที่กันได้ $4!$ วิธี

∴ โดยกฎการนับ จะมีวิธีจัดนั่งเก้าอี้ได้ทั้งหมด $3! \times 4! = 6 \times 24 = 144$ วิธี

6. จะมีกี่วิธีที่จะนำตัวอักษรจากคำว่า PECULIAR มาจัดเป็นคำใหม่โดยไม่คำนึงถึงความหมาย แต่ต้องขึ้นต้นด้วย P และลงท้ายด้วย R

วิธีทำ จากโจทย์ มีตัวอักษรทั้งหมด 8 ตัว จัดเรียงโดยขึ้นต้นด้วย P และลงท้ายด้วย R

จะสามารถจัดตัวอักษรได้ดังนี้ P?????R

เมื่อกำหนด P และ R แล้ว จะเหลือตัวอักษร 6 ตัว สลับที่กันได้ $6! = 720$ วิธี

แต่โจทย์กำหนดว่าจัดเป็นคำใหม่ ต้องลบ PECULIAR ออกไป 1 ตัว

∴ จะสามารถจัดเรียงตัวอักษรโดยขึ้นต้นด้วย P และลงท้ายด้วย R ได้ $720 - 1 = 719$ วิธี

7. มีหนังสือ 20 เล่มต่างๆ กัน นำมาจัดบนชั้นเป็นแถวยาว จะมีวิธีจัดได้กี่วิธีถ้าให้หนังสือ 2 เล่มที่กำหนดไว้เป็นพิเศษจะต้องไม่อยู่ติดกัน (ตอบในรูป n!)

วิธีทำ เนื่องจากการหากรณีที่ไม่อยู่ติดกัน ทำได้ยาก จึงหาโดยหาจากวิธีตรงกันข้าม คือกรณีที่อยู่ติดกัน จาก จำนวนวิธีทั้งหมด - วิธีที่อยู่ติดกัน = วิธีที่ไม่อยู่ติดกัน

จากโจทย์ จำนวนวิธีทั้งหมดคือการเรียงหนังสือ 20 เล่ม จัดเรียงได้ $20!$ วิธี

กรณีที่อยู่ติดกัน แบ่งเป็น 2 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 มัดรวมหนังสือ 2 เล่มที่กำหนดไว้ นับเป็น 1 เล่ม โดยสลับที่กันได้ $2! = 2$ วิธี

ขั้นตอนที่ 2 เท่ากับว่าเหลือหนังสือ 19 เล่ม จัดเรียงได้ $19!$ วิธี

รวมวิธีที่หนังสือสองเล่มอยู่ติดกัน ได้ $2 \times 19!$ วิธี

$$\begin{aligned} \therefore \text{วิธีที่หนังสือ 2 เล่มไม่อยู่ติดกัน} &= 20! - (2 \times 19!) &= (20 \times 19!) - (2 \times 19!) \\ &= (20 - 2) \times 19! &= 18 \times 19! \end{aligned}$$

8. จากตัวอักษรในคำ MONDAY

- (1) ถ้านำตัวอักษรมา 4 ตัว เพื่อจัดเป็นคำ จะทำได้กี่วิธี
 - (2) ถ้านำตัวอักษรทุกตัวมาจัดเรียงโดยไม่คำนึงถึงความหมาย จะทำได้กี่วิธี
 - (3) ถ้านำตัวอักษรทุกตัวมาจัดเป็นคำที่ขึ้นต้นด้วยสระ จะทำได้กี่วิธี
- หมายเหตุ : แต่ละคำไม่จำเป็นต้องมีความหมาย

วิธีทำ (1) ถ้านำตัวอักษรมา 4 ตัว เพื่อจัดเป็นคำ

มีตัวอักษรทั้งหมด 6 ตัวต่างๆ กัน เอามาจัดเรียงครั้งละ 4 ตัวอักษร

$$\text{จะมีวิธีจัดได้ } P_{6,4} = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!} = \frac{720}{2} = 360 \text{ คำ}$$

- (2) ถ้านำตัวอักษรทุกตัวมาจัดเรียงโดยไม่คำนึงถึงความหมาย

มีตัวอักษรทั้งหมด 6 ตัว นำมาจัดเรียงทั้งหมด ได้ $6! = 720$ วิธี

- (3) ถ้านำตัวอักษรทุกตัวมาจัดเป็นคำที่ขึ้นต้นด้วยสระ

แบ่งออกเป็น 2 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 เลือกตัวอักษรขึ้นต้นจากสระ 2 ตัว เลือกได้ 2 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 เหลือตัวอักษรอีก 5 ตัว สลับที่กันได้ $5! = 120$ วิธี

สร้างคำที่ขึ้นต้นด้วยสระได้ $2 \times 120 = 240$ วิธี

9. จะมีกี่วิธีที่จัดคน 3 คน ให้นั่งเก้าอี้ซึ่งวางเรียงเป็นแถว ไว้ 7 ตัว โดย

- (1) ไม่มีเงื่อนไข

วิธีทำ เปรียบกับว่ามีของ 7 สิ่ง เอามาจัดเรียงครั้งละ 3 สิ่ง

$$\text{จะมีวิธีการจัดทั้งหมด } P_{7,3} = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times \cancel{4!}}{\cancel{4!}} = 210 \text{ วิธี}$$

- (2) ห้ามนั่งติดกันทั้ง 3 คน

วิธีทำ หาโดยใช้วิธีตรงกันข้าม คือหาวิธีที่นั่งติดกันทั้ง 3 คน แล้วไปลบจากทั้งหมด

แบ่งเป็น 2 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 จับ 3 คนนั่งติดกัน หรือมัดรวมกันนับเป็น 1 คน 3 คนสลับกันได้ $3!$ วิธี

ขั้นตอนที่ 2 จัด 3 คนไปนั่งเก้าอี้ จะนั่งได้ลักษณะดังนี้

กำหนดให้ แทนเก้าอี้ว่าง

แทนเก้าอี้ที่มีคนนั่ง

แบบที่ 1

แบบที่ 2

แบบที่ 3

นั่งได้ 5 วิธี

แบบที่ 4

แบบที่ 5

วิธีในการนั่งโดยนั่งติดกันทั้ง 3 คน เท่ากับ $3! \times 5 = 6 \times 5 = 30$ วิธี

$$\therefore \text{วิธีที่ไม่นั่งติดกันทั้ง 3 คน} = \text{ทั้งหมด} - \text{นั่งติดกัน 3 คน} = 210 - 30 = 180 \text{ วิธี}$$

10. จำนวนคี่ที่เลขโดดในแต่ละหลักไม่ซ้ำกัน และมากกว่า 300 แต่น้อยกว่า 900 มีทั้งหมดกี่จำนวน

วิธีทำ แยกเป็น 2 กรณี

กรณีที่ 1 หลักร้อย เป็นเลขคี่ คือ 3, 5 และ 7

หลักร้อย เลือกตัวเลขได้ 3 วิธี

หลักหน่วย เลือกตัวเลขได้ 4 วิธี หลักหน่วยเป็นเลขคี่และตัวเลขในแต่ละหลักไม่ซ้ำกัน

หลักสิบ เลือกตัวเลขได้ 8 วิธี

มีวิธีสร้างจำนวนได้ $3 \times 4 \times 8 = 96$ วิธี

กรณีที่ 2 หลักร้อย เป็นเลขคู่ คือ 4, 6, 8

หลักร้อย เลือกตัวเลขได้ 3 วิธี

หลักหน่วย เลือกตัวเลขได้ 5 วิธี หลักหน่วยเป็นเลขคี่และตัวเลขในแต่ละหลักไม่ซ้ำกัน

หลักสิบ เลือกตัวเลขได้ 8 วิธี

มีวิธีสร้างจำนวนได้ $3 \times 5 \times 8 = 120$ วิธี

ดังนั้น จำนวนคี่ที่มีค่ามากกว่า 300 แต่น้อยกว่า 900 โดยที่ตัวเลขในแต่ละหลักไม่ซ้ำกันมี $96 + 120$
 $= 216$ จำนวน

11. จะจัดคน 5 คน ยืนเป็นแถวเพื่อถ่ายรูป โดยจะถ่ายทีละกี่คนก็ได้ จะมีภาพที่แตกต่างกันทั้งหมดกี่ภาพ

วิธีทำ เมื่อถ่ายรูปทีละคน จะได้ 5 วิธี

เมื่อถ่ายรูปทีละสองคน จะได้ $P_{5,2} = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = 20$ วิธี

เมื่อถ่ายรูปทีละสามคน จะได้ $P_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 60$ วิธี

เมื่อถ่ายรูปทีละสี่คน จะได้ $P_{5,4} = \frac{5!}{(5-4)!} = \frac{5!}{1!} = 120$ วิธี

เมื่อถ่ายรูปทีละห้าคน จะได้ $P_{5,5} = \frac{5!}{5!} = 120$ วิธี

ดังนั้น จะมีภาพที่แตกต่างกันทั้งหมด $5 + 20 + 60 + 120 + 120 = 325$ ภาพ

12. ในที่ทำงานแห่งหนึ่งมีตำแหน่งที่ต่างกันว่างอยู่ 5 ตำแหน่ง โดยเป็นตำแหน่งสำหรับชาย 3 ตำแหน่ง และตำแหน่งสำหรับหญิง 2 ตำแหน่ง มีผู้มาสมัครเข้าทำงานเป็นชาย 6 คน หญิง 5 คน จะมีวิธีจัดคนที่มาสมัครเข้าทำงานได้กี่วิธี

วิธีทำ แบ่งออกเป็น 2 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 จัดผู้ชายทั้งหมด 6 คน เข้าทำงานในตำแหน่ง 3 ตำแหน่ง (จัดครั้งละ 3 คน)

จัดได้ $P_{6,3} = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = 6 \times 5 \times 4 = 120$ วิธีทำ

ขั้นตอนที่ 2 จัดผู้หญิงทั้งหมด 5 คน เข้าทำงานในตำแหน่ง 2 ตำแหน่ง (จัดครั้งละ 2 คน)

จัดได้ $P_{5,2} = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = 5 \times 4 = 20$ วิธีทำ

∴ วิธีจัดคนที่มาสมัครเข้าทำงาน $120 \times 20 = 2400$ วิธี

13. ครอบครัวหนึ่งมีพี่น้อง 6 คน เป็นชาย 2 คน หญิง 4 คน จำนวนวิธีที่จะจัดให้คนทั้งหมดยืนเรียงกันเพื่อถ่ายรูป โดยให้ชายสองคนยืนอยู่ริมสองข้างเสมอเท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (O-NET51)

ก. 12 วิธี ข. 24 วิธี ค. 36 วิธี ง. 48 วิธี

วิธีทำ แบ่งออกเป็น 2 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 จัดชาย 2 คน ยืนอยู่ริม 2 ข้าง โดยสลับที่กันได้ $2! = 2$ วิธี

ขั้นตอนที่ 2 จัดหญิง 4 คนที่เหลือยืนสลับกันระหว่างชายทั้ง 2 คน

จะสลับที่กันได้ $4! = 24$ วิธี

∴ วิธีในการจัดเรียงทั้งหมดเท่ากับ $2 \times 24 = 48$ วิธี (ตอบ ง.)